

**Розширений план лекцій
з дисципліни «Прикладні аспекти варіаційного числення»**

лекційних годин – 30
Викладач – доц. Крапива Н.В.

СЕМЕСТРОВИЙ МОДУЛЬ 1

Змістовий модуль 1. Екстремум функції багатьох змінних

Лекція 1.

1.1. Предмет, зміст і особливості курсу. Структура курсу, його значення і місце в підготовці інженера. Деякі класичні задачі варіаційного числення.

1.2. Допоміжні поняття. Лінійні простори. Поняття норми, метрики. Евклідовий простір.

1.3. Ортогональний базис та ортогональні перетворення. Квадратичні форми. Критерій Сильвестра.

Лекція 2.

2.1. Екстремум функції багатьох змінних. Безумовний екстремум. Теорема Вейєрштраса. Необхідні та достатні умови існування екстремуму.

2.2. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.

Змістовий модуль 2. Варіаційні задачі пошуку безумовного екстремуму функціоналу. Метод варіації в задачах з закріпленими границями.

Лекція 3.

3.1. Функціонали в лінійних нормованих просторах. Основні поняття.

3.2. Близькість кривих.

3.3. Неперервність функціоналу.

3.4. Варіація функціонала.

3.5. Екстремум функціонала.

3.6. Необхідна умова екстремуму функціоналу в лінійному нормованому просторі. Основна лема варіаційного числення.

Лекція 4.

4.1. Найпростіша задача варіаційного числення (задача з закріпленими границями).

4.2. Необхідна умова екстремуму в найпростішій задачі варіаційного числення.

4.2. Рівняння Ейлера

4.3. Частинні випадки інтегрованості рівняння Ейлера.

4.4. Знаходження екстремалі в варіаційній задачі. Задача про найменшу поверхню обертання. Задача Бернуллі про брахістохрону.

Змістовий модуль 3. Варіаційні задачі пошуку безумовного екстремуму функціоналу. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення.

Лекція 5.

5.1. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення. Функціонали, залежні від похідних вищих порядків.

5.2. Функціонали, залежні від декількох функцій.

5.3. Функціонали, залежні від функцій декількох незалежних змінних.

5.4. Рівняння Ейлера-Пуассона. Рівняння Остроградського в задачі пошуку екстремалів функціоналів від функцій багатьох змінних.

Лекція 6.

6.1. Поняття поля екстремалей.

6.2. Умови можливості включення екстремалі в поле екстремалей. Умова Якобі.

6.3. Посилена умова Лежандра.

Лекція 7.

7.1. Функція Вейєрштраса. Достатні умови сильного і слабого екстремуму функціоналу.

7.2. Достатні умови Лежандра.

СЕМЕСТРОВИЙ МОДУЛЬ 2

Змістовий модуль 4. Варіаційні задачі пошуку безумовного екстремуму функціоналу. Метод варіації в задачах з рухомими границями.

Лекція 8.

8.1. Постановка задачі з рухомими границями. Функціонали, залежні від однієї функції.

8.2. Випадок гладких екстремалей. Необхідні умови екстремуму. Умова трансверсальності.

Лекція 9.

9.1. Функціонали, залежні від однієї функції. Випадок негладких екстремалей. Екстремалі з кутовими точками. Задачі щодо відображення і переломлення екстремалей.

9.2. Умови відображення і переломлення екстремалей. Умова Вейєрштраса-Ердмана.

Змістовий модуль 5. Варіаційні задачі пошуку умовного екстремуму. Задача Больца

Лекція 10.

10.1. Постановка варіаційних задач на умовний екстремум. Необхідна умова екстремуму в задачах з кінцевими зв'язками.

10.2. Необхідна умова екстремуму в задачах з диференціальними зв'язками.

Лекція 11.

11.1. Задачі на умовний екстремум з інтегральними зв'язками.

11.2. Ізопериметрична задача. Розв'язання задачі Дідони.

Лекція 12.

12.1. Постановка задачі Больца.

12.2. Необхідна умова екстремуму в елементарній задачі Больца.

Лекція 13.

13.1. Достатні умови екстремуму функціоналу. Друга варіація функціонала.

13.2. Достатні умови сильного і слабого екстремуму в найпростішій задачі варіаційного числення.

13.3. Інваріантний інтеграл Гільберта. Умови Якобі, Вейєрштраса і Лежандра.

Змістовий модуль 6. Прямі методи варіаційного числення.

Лекція 14.

14.1. Прямі методи варіаційного числення. Кінцево-різностний метод Ейлера.

14.2. Метод Рітца, Бубнова-Гальоркіна.

Лекція 15.

15.1. Метод Канторовича.

15.2. Метод найменших квадратів.